

EX.1 une urne contient 9 boules : 3 Rouge, 4 Vertes et 2 Blanches. On tire successivement et sans remise deux boules ;

0,5 1°) Mg le nombre de possibilités est : 72.
2°) soit A et B deux événements : A : "tirer la 1^{ère} de couleur blanche" et B : "tirer deux boules de même couleur"

1 2°-a) Mg : $p(A) = \frac{2}{9}$

1,5 2°-b) Calculer $p(B)$ et en déduire que : $p(\bar{B}) = \frac{13}{18}$. (\bar{B} est l'événement contraire)

1 3°) Sachant que la 1^{ère} boule est blanche ; quelle est la probabilité pour que les deux boules soient de couleurs différentes ?

4°) soit X la v.a. égal au nombre de boules blanches tirées.

3 Copier et compléter le tableau ci-contre : (justifier les calculs)

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$

EX.2 I ($\forall x \in \mathbb{R}$) $g(x) = e^x - x$

1 1°) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe sur \mathbb{R} .

1 2°-a) Calculer $g(0)$ et dresser le tableau de variation de g (sans calcul de limites)

0,5 2°-b) En déduire que : ($\forall x \in \mathbb{R}$) $g(x) > 0$

II ($\forall x \in \mathbb{R}$) $f(x) = 2e^x - x^2$

(C) est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1,5 1°) Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation géométrique.

0,5 2°-a) Vérifier que : ($\forall x \in \mathbb{R}^*$) $f(x) = 2x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2} \right)$

1,5 2°-b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation.

0,5 3°-a) Mg : ($\forall x \in \mathbb{R}$) $f'(x) = 2g(x)$

1 3°-b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} et dresser le tableau de variation de f .

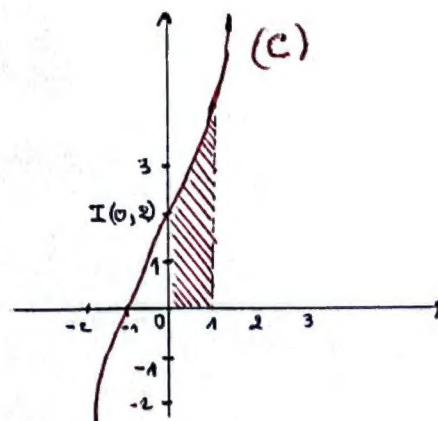
0,5 4°-a) Vérifier que : $f''(x) = 2(e^x - 1)$; $x \in \mathbb{R}$

1 4°-b) En déduire que $I(0,2)$ est le point d'inflexion de (C).

2 5°) Calculer l'aire de la partie hachurée. (voir figure ci-contre)

III
$$I = \int_0^1 (x-3)e^x dx$$

2 En utilisant une intégration par partie, montrer que : $I = 4 - 3e$



*** fin ***

Correction du DS n° 2

Exercice 1

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 2 \\ \hline (R) & (V) & (B) \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} p=2 \\ n=9 \end{array}$$

1°) tirage successive sans remise
de $p=2$ parmi $n=9$ donc:
 $\text{Card } \Omega = A_9^2 = 9 \times 8 = 72$

2°-a) A : $\begin{array}{|c|c|} \hline B & B \\ \hline \end{array}$ ou $\begin{array}{|c|c|} \hline B & \bar{B} \\ \hline \end{array}$
 $\text{Card } A = A_2^2 + A_2^1 A_7^1$
 $= 2 + 2 \times 7 = 16$
 $p(A) = \frac{16}{72} = \frac{2 \times 8}{9 \times 8} = \boxed{\frac{2}{9}}$

2°-b) B : $\begin{array}{|c|c|} \hline R & R \\ \hline \end{array}$ ou $\begin{array}{|c|c|} \hline V & V \\ \hline \end{array}$ ou $\begin{array}{|c|c|} \hline B & B \\ \hline \end{array}$
 $\text{Card } B = A_3^2 + A_4^2 + A_2^2$
 $= 3 \times 2 + 4 \times 3 + 2 \times 1$
 $= 6 + 12 + 2 = 20$
 $p(B) = \frac{20}{72} = \frac{5 \times 4}{9 \times 2 \times 4} = \boxed{\frac{5}{18}}$

Déduction: on sait que:

$$p(\bar{B}) = 1 - p(B)$$

donc: $p(\bar{B}) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{18-5}{18} = \boxed{\frac{13}{18}}$

3°) on a: B : deux boules de même couleurs

donc: \bar{B} : deux boules de couleurs différentes.

on va calculer la probabilité de \bar{B} sachant que A est réalisé
c-à-d: $p_A(\bar{B})$

on sait que:

$$p_A(\bar{B}) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(A)}$$

avec: $p(A) = \frac{2}{9}$

et $A \cap \bar{B}$: $\begin{array}{|c|c|} \hline B & R \\ \hline \end{array}$ ou $\begin{array}{|c|c|} \hline B & V \\ \hline \end{array}$
elmc: $p(A \cap \bar{B}) = \frac{A_2^1 A_3^1 + A_2^1 A_4^1}{A_9^2}$
 $= \frac{2 \times 3 + 2 \times 4}{72} = \frac{6+8}{72} = \frac{14}{72} = \frac{7}{36}$
donc: $p_A(\bar{B}) = \frac{\frac{7}{36}}{\frac{2}{9}} = \frac{7}{36} \times \frac{9}{2} = \boxed{\frac{7}{8}}$

4°) on a: X = nombre de boules blanches tirées.

$(X=0)$: $\begin{array}{|c|c|} \hline \bar{B} & \bar{B} \\ \hline \end{array}$ avec: $\bar{B} = V$ ou R
donc: $p(X=0) = \frac{A_7^2}{72} = \frac{42}{72} = \boxed{\frac{7}{12}}$

2^{ème} méthode:

$(X=0)$: $\begin{array}{|c|c|} \hline R & V \\ \hline \end{array}$ ou $\begin{array}{|c|c|} \hline V & R \\ \hline \end{array}$ ou $\begin{array}{|c|c|} \hline V & V \\ \hline \end{array}$ ou $\begin{array}{|c|c|} \hline R & R \\ \hline \end{array}$
 $\text{Card}(X=0) = A_3^1 A_4^1 + A_4^1 A_3^1 + A_4^2 + A_3^1$
 $= 2 \times A_3^1 A_4^1 + A_4^2 + A_3^1 = 42$
donc: $p(X=0) = \frac{42}{72}$

$(X=1)$: $\begin{array}{|c|c|} \hline B & V \\ \hline \end{array}$ ou $\begin{array}{|c|c|} \hline V & B \\ \hline \end{array}$ ou $\begin{array}{|c|c|} \hline B & R \\ \hline \end{array}$ ou $\begin{array}{|c|c|} \hline R & B \\ \hline \end{array}$
 $2 \times A_2^1 A_4^1 + 2 \times A_2^1 A_3^1$
 $p(X=1) = \frac{2 \times 2 \times 4 + 2 \times 2 \times 3}{72} = \frac{28}{72} = \boxed{\frac{7}{18}}$

$(X=2)$: $\begin{array}{|c|c|} \hline B & B \\ \hline \end{array} \rightarrow A_2^2 = 2$
 $p(X=2) = \frac{2}{72} = \boxed{\frac{1}{36}}$

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{36}$

Exercice 2 :

Partie I : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) = e^x - x$

1°) $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) = (e^x)' - x' = e^x - 1$

signe de $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

et on a : $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x) = e^x - 1$		-	+

2°-a) $g(0) = e^0 - 0 = 1$

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g		\searrow $g(0) = 1$ \nearrow	

2°-b) d'après 2°-a) : $g(0)$ valeur minimal de g : $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) \geq g(0)$

avec : $g(0) = 1 > 0$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) > 0$

Partie II $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = 2e^x - x^2$

1°) on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \times 0 - (+\infty) = -\infty$

on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2e^x}{x} - \frac{x^2}{x} = \frac{2e^x}{x} - x$$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{0}{-\infty} = 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 - (-\infty) = +\infty$

interprétation : (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $(-\infty)$.

2°-a) on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ;$

$$\begin{aligned} 2x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2} \right) &= 2x^2 \times \frac{e^x}{x^2} - 2x^2 \times \frac{1}{2} \\ &= 2e^x - x^2 = f(x) \end{aligned}$$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) f(x) = 2x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2} \right)$

2°-b) on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x - x^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= "+\infty \times (+\infty)" = +\infty$$

car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2} \right) = +\infty$$

interprétation :

(C) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $(+\infty)$.

3°-a) $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = (2e^x - x^2)'$
 $= 2e^x - 2x = 2(e^x - x) = 2g(x)$

3°-b) on sait que : $\forall x \in \mathbb{R} ; g(x) > 0$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) > 0$

tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$	$+\infty$

4° a) $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = 2g(x)$

$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f''(x) = 2g'(x)$

$f''(x) = 2(e^x - 1)$

4° b) Signe de $f''(x)$: d'après I-1°)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		$- \quad \quad +$	$+$

f'' s'annule et change de signe en 0 donc :

$I(0; f(0))$ est un point d'inflexion de (C) .

càd : $I(0; 2)$

car : $f(0) = 2xe^0 - 0 = 2 \times 1 = \boxed{2}$

(I est le seul point d'inflexion)

5°) soit A l'aire de la partie hachurée.

on sait que :

$A = \left(\int_0^1 |f(x)| dx \right) \text{ u.A}$

d'après le dessin on a :

$\forall x \in [0; 1] \quad f(x) \geq 0$

donc : $\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx$

$= \int_0^1 2e^x - x^2 dx$

$= 2 \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 x^2 dx$

$= 2 [e^x]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1$

$= 2(e^1 - e^0) - \left(\frac{1}{3} - \frac{0}{3} \right)$

$= 2(e - 1) - \frac{1}{3}$

$= 2e - 2 - \frac{1}{3}$

$= 2e - \frac{6}{3} - \frac{1}{3}$

$= 2e - \frac{7}{3}$

$A = \left(2e - \frac{7}{3} \right) \text{ u.A}$

Partie III

$J = \int_0^1 (x-3)e^x dx$

$\begin{cases} u(x) = x-3 \\ v'(x) = e^x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$J = [(x-3)e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x dx$

$= (1-3)e^1 - (0-3)e^0 - [e^x]_0^1$

$= -2e + 3 \times 1 - (e - 1)$

$= -2e + 3 - e + 1$

$= 4 - 3e$

donc : $\boxed{J = 4 - 3e}$

★ fin ★